

Квантова механіка. Фізичний факультет, 4 курс, 7 семестр.

Заняття № 8а-9а. Повторення матеріалу минулого семестру: основні формули та поняття квантової механіки.

1. Основні формули та поняття

1. Довжина хвилі Де-Бройля.
2. Хвильова функція. Фізичний сенс хвильової функції.
3. Визначення ермітового оператора. Рівняння на власні функції та власні значення. Властивості власних функцій та власних значень ермітових операторів.
4. Середнє значення оператора фізичної величини.
5. Визначення комутатора двох операторів.
6. Хвильове рівняння Шредінгера.
7. Стаціонарне рівняння Шредінгера. Оператор Гамільтона.
8. Оператори координати та імпульсу.
9. Гамільтоніан гармонічного осцилятора.
10. Співвідношення невизначеностей для координати та імпульсу.
11. Поняття спіну. Принцип Паулі.
12. Якісно пояснити характер руху частинки в полі з потенціальною енергією $U(x)$ заданого вигляду.

2. Розглянути рух квантової частинки в полі двох дельта-потенціалів $U(x) = \alpha_1 \delta(x + a_1) + \alpha_2 \delta(x - a_2)$; $a_{1,2} > 0$. Знаки $\alpha_{1,2}$ – будь-які. (Д/з – закінчити цю задачу)

Нова тема: Оператор кутового моменту. Комутаційні співвідношення. Власні функції та власні значення операторів \hat{l}_z и \hat{l}^2 . «Сходивкові оператори».

1. Оператор кутового моменту.

1.1. Визначення оператора углового моменту \hat{L} в декартових координатах:

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \hat{p}_x & \hat{p}_y & \hat{p}_z \end{vmatrix}; \quad \hat{r} = \vec{r}, \quad \hat{p} = -i\hbar \nabla = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vec{r}},$$

В тензорних позначеннях:

$$\hat{L}_i = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k,$$

ε_{ijk} – символ Леві-Чивіта.

$$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z, \quad \hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x,$$
$$\vec{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2.$$

Задача 1. Перевірити комутаційні співвідношення:

$$\left[\hat{L}_i, \hat{x}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{x}_k; \quad \left[\hat{L}_i, \hat{p}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{p}_k; \quad \left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k; \quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_i \right] = 0.$$

Задача 2. Підрахувати $\left[\hat{L}_i, \hat{r}^2 \right]$ (3 ГКК № 3.4(a))

1.2. Безрозмірний оператор кутового моменту \hat{l} :

$$\hat{l} = \frac{1}{\hbar} \hat{L}; \quad \left[\hat{l}_i, \hat{l}_j \right] = i\varepsilon_{ijk} \hat{l}_k; \quad \left[\hat{l}^2, \hat{l}_i \right] = 0.$$

1.3. Оператори \hat{l}_z та \hat{l}^2 в сферичних координатах:

$$\hat{l}_z = -i \frac{\partial}{\partial \varphi}; \quad \hat{l}^2 = -\Delta_{\theta\varphi} = -\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right].$$

1.4. Власні функції та власні значення операторів \hat{l}_z та \hat{l}^2 :

$$\begin{aligned} \hat{l}^2 Y_{lm}(\theta, \varphi) &= l(l+1) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots; \\ \hat{l}_z Y_{lm}(\theta, \varphi) &= m Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \end{aligned}$$

l – орбітальне квантове число, m – магнітне квантове число.

Сферичні функції: $Y_{lm}(\theta, \varphi) = C_{lm} P_l^m(\theta) e^{im\varphi}$;

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{(d \cos \theta)^m} P_l(\cos \theta); \quad P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l,$$

де $P_l^m(\theta)$ – приєднані поліноми Лежандра, $P_l(\cos \theta)$ – поліноми Лежандра,

C_{lm} – нормувальна константа.

1.4. «Сходінкові оператори» \hat{l}_{\pm} :

$$\hat{l}_{\pm} = \hat{l}_x \pm i\hat{l}_y.$$

Задача 3. Перевірити комутаційні співвідношення

$$\left[\hat{l}_z, \hat{l}_\pm \right] = \pm \hat{l}_\pm; \quad \left[\hat{l}_+, \hat{l}_- \right] = 2\hat{l}_z.$$

Задача 4. Показати, що $\hat{l}_\pm \psi_m$, де ψ_m – власні функції оператора \hat{l}_z z -проекції кутового моменту ($\hat{l}_z \psi_m = m \psi_m$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), є також власними функціями оператора \hat{l}_z із власними значеннями $m + 1$ і $m - 1$ для \hat{l}_+ і \hat{l}_- відповідно (ГКК №3.11)

Задача 5. Знайти власні значення оператора \hat{l}^2 . Скористатися комутаційними співвідношеннями з **задачі 3.**

Задача 6. У стані ψ_m с заданим значенням проекції кутового моменту на вісь z знайти середні значення $\overline{l_x}, \overline{l_y}, \overline{l_z}, \overline{l_x l_y}, \overline{l_y l_x}, \overline{l_x^2}, \overline{l_y^2}, \overline{l_z^2}$. (ГКК №3.12)

Домашнє завдання ГКК № 3.4(а), ГКК № 3.12 (закінчити), 3.13, 3.14.

ГКК – Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981;
Гр. – Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984